Luis Rico
María C. Cañadas
José Gutiérrez
Marta Molina
Isidoro Segovia
(Eds.)

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Homenaje a Encarnación Castro

Granada, 2013

Colección «Didáctica de la Matemática»
Diseño de portada: José L. Lupiáñez
Edición promovida por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico»
Los capítulos de este libro han superado una revisión por pares.

Comité Científico
L. Rico
M. C. Cañadas
J. Gutiérrez
M. Molina
I. Segovia

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.) (2013).
Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.
Granada, España: Editorial Comares.

© Los autores

Editorial Comares, S.L.
Gran Capitán, 10 – Bajo
18002 Granada
Telf.: 958 465 382 • Fax: 958 272 736
E-mail: libreriacomares@comares.com
http://www.editorialcomares.com
http://www.comares.com

ISBN: 978-84-9045-095-6 • Depósito legal: Gr. 1.788/2013

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

EN TORNO A TRES PROBLEMAS DE LA GENERALIZACIÓN[1]

Concerning three problems of generalization

Luis Radford[a,b]

[a] Université Laurentienne, Canadá y [b] University of Manchester, Reino Unido

RESUMEN

La generalización es uno de los procedimientos principales de producción del conocimiento. Esta se constituye a través de tres problemas fundamentales, mutuamente relacionados. El primero es un problema fenomenológico planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad. El segundo es un problema epistemológico, que consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto. El tercer problema es un problema semiótico, que resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado. En este trabajo, propongo una reflexión sobre dichos problemas, centrándome en particular en la generalización de patrones en un contexto educativo.

Palabras clave: Generalización; Gestos; Patrones; Percepción; Semiótica.

ABSTRACT

Generalization is one of the principal knowledge production processes. It is constituted through three fundamental interrelated problems. The first one is a phenomenological problem that deals with the choice of sensible determinations—a problem in which intuition, attention, intention, and sensibility participate. The second problem is of an epistemological nature; it consists in the manner in which the extrapolation or generalization produces a new object. The third problem is of a semiotic nature. It results from the semiotic means that are mobilized in order to denote the generalized object. In this presentation I discuss these fundamental problems, focusing in particular on the generalization of patterns in an educational context.

Keywords: *Generalization; Gestures; Intention; Patterns; Perception; Semiotics.*

RADFORD, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

[1] Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH).

Introducción

En un célebre pasaje de la *Lógica*, Kant dice:

> Veo un abeto, un sauce y un tilo. Al comparar primero estos tres objetos, noto que los tres son diferentes entre ellos respecto al tronco, las ramas, las hojas, etc. Sin embargo, luego reflexiono en lo que tienen en común... y hago abstracción de su tamaño, forma, etc. Así formo un concepto de árbol. (Kant, 1974, p. 100)

Este pasaje sugiere que la generalización se constituye, primero, a través de un proceso de determinaciones sensibles sobre objetos en el que participan, entre otros, la intuición, la atención y la sensibilidad. Vemos tres objetos frente a nosotros (en este caso, un abeto, un sauce y un tilo). Operando en el plano fenomenológico, efectuamos una serie de determinaciones. En el ejemplo que Kant ofrece, las determinaciones sensibles corresponden al tronco, las ramas y las hojas, que notamos que son *diferentes* de un objeto al otro. A pesar de sus diferencias, procedemos a una segunda serie de determinaciones, orientada esta vez hacia lo que tienen en *común*. Y luego, por una especie de «abstracción», dice Kant, formamos el concepto de árbol.

La abstracción a la que hace referencia Kant es, sin embargo, más compleja de lo que sugiere el ejemplo. Para llegar a formar el concepto de árbol, la escogencia de lo que vamos a dejar de lado y lo que vamos a conservar de las determinaciones sensibles se inscribe en un terreno que ya no es fenomenológico, sino epistemológico. Es, en efecto, en este terreno que criterios de selección deberán ser tomados en cuenta y llevarán a un concepto o a otro. Según la manera de operar de lo epistemológico, los datos sensibles serán abstraídos, inducidos o generalizados a fin de producir el nuevo objeto. Queda, por fin, un problema semiótico: el de denotar de alguna manera el nuevo objeto. En el caso de los objetos botánicos, como en el ejemplo de Kant, la denotación se hace a través del lenguaje natural: el resultado de la generalización se designa a través de un término lingüístico, «árbol». En el caso de los objetos matemáticos, la denotación puede tomar varias formas. En la generalización de patrones, por ejemplo, la denotación puede hacerse a través de lo gestual, el lenguaje natural o el simbolismo alfanumérico (o combinaciones de estos). Del ejemplo anterior podemos ya observar que en una generalización aparecen tres problemas importantes: uno fenomenológico, uno epistemológico y otro semiótico. En este capítulo, propongo una reflexión didáctica en torno a esos tres problemas en el caso particular de la generalización de patrones o secuencias figurales.

El problema fenomenológico y la intención perceptiva

Consideremos la siguiente secuencia (Figura 1) que hace parte de una serie de lecciones sobre la generalización algebraica emprendida en una clase de segundo año de escuela primaria (niños de 7-8 años).

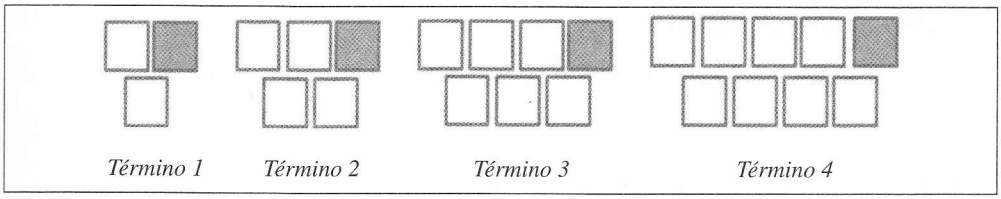

Figura 1. *Los cuatro primeros términos de una secuencia investigada en una clase de segundo año*

Para poder generalizar la secuencia, los alumnos deben proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias. A priori, las determinaciones posibles constituyen un conjunto extenso: los alumnos pueden fijar su atención en la forma de los términos, en la cantidad de cuadros que constituyen cada uno de los términos, el color, el espacio entre ellos, etc. La escogencia de similitudes y diferencias se hará, en principio, según la comprensión que se hacen los estudiantes del *objeto* de la actividad de generalización. En efecto, la mirada con la que cada uno de nosotros percibe el mundo no es una mirada desinteresada. Vemos con cierta *intención*, deteniéndonos en aquellas determinaciones sensibles que le corresponden.

En nuestra serie de lecciones, el *objeto* de la actividad es reconocer una manera histórica y culturalmente constituida de razonar algebraicamente sobre secuencias. Ahora bien, ese objeto no es claro para los alumnos. Y no puede serlo. Si el objeto de la actividad fuese claro para ellos, no habría nada por aprender. Por el contrario, el objeto de la actividad sí es claro para el maestro. Esta es la característica fundamental de la actividad de enseñanza-aprendizaje: su asimetría respecto al objeto de estudio. Esto significa que el maestro y el alumno no atienden necesariamente al mismo complejo de determinaciones sensibles. La intención fenomenológica del maestro y de los alumnos no es la misma.

A falta de tener una idea clara del objeto de la actividad, no es sorprendente, pues, que cuando les pedimos a los alumnos que prolonguen la secuencia de términos figurales, los alumnos proceden a determinaciones que no son necesariamente propicias para la producción de una generalización algebraica. A menudo, los alumnos se centran sobre la dimensión cuantitativa de los términos y, al continuar la secuencia de la Figura 1, proponen términos como los que se muestran en la Figura 2.

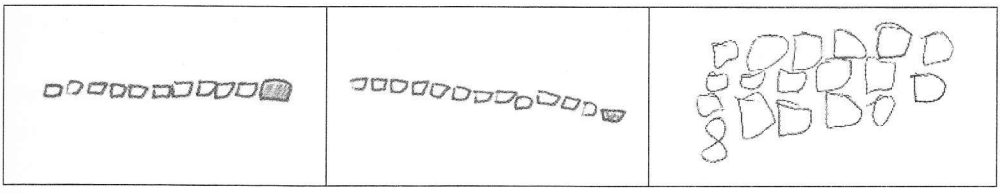

Figura 2. *Izquierda y medio, los términos 5 y 6, respectivamente, según un alumno. A la derecha, el término 8 según otro alumno*

El problema epistemológico

Para producir los términos 5, 6 y 8, los alumnos han hecho una *generalización*. Han notado que los términos son diferentes numéricamente y que entre un término y el siguiente hay dos cuadrados de más. Esta *propiedad común* ha sido extrapolada a los siguientes términos. Aunque tal procedimiento es operacional para pequeñas figuras, el mismo se vuelve impráctico cuando se trata de saber cuántos cuadrados hay en términos remotos, como el término 25. A menudo, los alumnos afirman que hay que seguir añadiendo 2 hasta llegar al término buscado (Radford, 2010). Adolescentes, que han tenido oportunidad de alcanzar un pensamiento numérico más sofisticado, proponen estrategias basadas en procedimientos de ensayo y error: proponen «n + 1»; remplazan n por números pequeños como 2 o 3 y se dan cuenta que la fórmula propuesta no funciona. Luego tratan otra, como «n + 2», etc., hasta que «encuentran» que la fórmula es «2n+1». Estos dos procedimientos se sitúan en el terreno epistemológico señalado arriba: de un trabajo de observación en el terreno fenomenológico, ciertas determinaciones son seleccionadas; luego se procede a una extrapolación que opera diferentemente. En el primer caso, se propone un procedimiento en el que se dicen de manera *genérica* las etapas a seguir (continuar añadiendo pacientemente 2 hasta llegar al término buscado, que puede ser el término 25, 50, 1000, etc.). En el segundo caso, se propone un procedimiento de ensayo y error. Ninguno de estos dos procedimientos reposan, como puede verse, en conceptos algebraicos, y no obedecen por tanto a una generalización algebraica. Estos procedimientos de generalización son más bien aritméticos. Si estas generalizaciones no son algebraicas, ¿cómo podemos caracterizar las generalizaciones algebraicas de secuencias figurales?

La generalización algebraica de patrones

La generalización algebraica de secuencias figurales o numéricas, sugiero, esta basada en los siguientes puntos: (a) la toma de conciencia de una *propiedad común* que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, p_1, p_2, p_3, …, p_k), (b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia (p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, …) y (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa* que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Hay varios elementos envueltos en la generalización, como lo proponemos aquí. Primero, una característica común local es notada a partir de un número finito de términos. Como lo hemos mencionado anteriormente, esta etapa requiere hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. Enseguida, esa característica común es generalizada a los otros términos de la secuencia. La generalización de la «característica común» (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción (*abduction*), esto es, algo que es solamente plausible (Peirce, 1931-

1958, CP 2.270). Dependiendo del uso de esta abducción, la generalización tomará varios cursos. Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término al otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados), llegamos a una generalización aritmética. En este caso, *no* hay *deducción* de una expresión directa que permita calcular el número de cuadrados en cualquier término de la secuencia. La abducción permite generar un procedimiento pero no una expresión directa—en otras palabras, una fórmula. En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica. Para que la generalización sea algebraica se requiere, de acuerdo a lo expuesto arriba, que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término.

Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H. La Figura 3 muestra un diagrama que explica estas ideas. Las flechas son bidireccionales, pues a menudo hay idas y vueltas entre los diferentes elementos. Hay también relaciones entre casillas no contiguas, que omitimos con el fin de simplificar el diagrama.

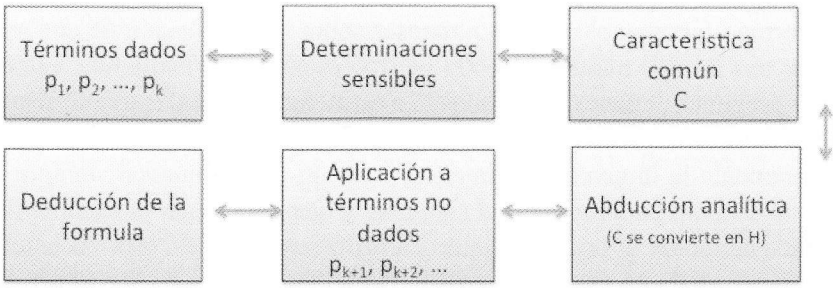

Figura 3. *Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales*

El aprendizaje de la generalización algebraica

La Figura 3 muestra la complejidad detrás de la generalización algebraica. No es sorprendente que, cuando alumnos de diversos niveles educativos se enfrentan a ella por primera vez, aparezca una serie de dificultades de índole diferente (un estudio con adolescentes es presentado en Radford, 2010; un estudio con alumnos de escuela primaria es presentado en Radford, 2012).

Entre las dificultades se encuentra, primero, la escogencia de determinaciones sensibles en el terreno fenomenológico. Estas dificultades resultan de las varias posibilidades que ofrece la percepción de los términos dados. Como vimos anteriormente, los alumnos tienden a centrarse en la dimensión numérica. Sucede también que los alumnos se dejan llevar por la apariencia de los términos. Así, en la primera lección de una serie de lecciones de introducción a la generalización algebraica en una clase de segundo año de escuela primaria, hemos podido constatar lo siguiente. Los alumnos fueron llamados a pronunciarse sobre la veracidad o falsedad de la afirmación hecha por una alumna ficticia (Monique) quien pretendía que el término mostrado en la Figura 4 corresponde al término 8 de la secuencia dada en la Figura 1.

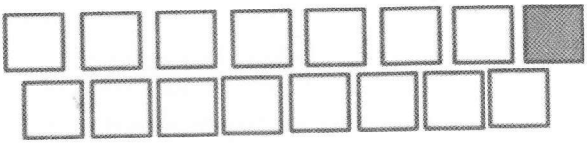

Figura 4. *El término 8 de Monique*

Dejándose llevar por la apariencia del término, los alumnos concluyeron en su mayoría que el término de Monique corresponde, efectivamente, al término 8 de la secuencia, sin notar que hace falta un cuadrado blanco en la figura de arriba. Para notar este hecho, los alumnos tendrían que tomar en cuenta dos estructuras que desempeñan un papel importante en la generalización algebraica. En efecto, el trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes: una de tipo numérico y otra de tipo espacial. La estructura numérica responde a la pregunta: ¿cuántos cuadrados? La estructura espacial responde a la pregunta ¿en dónde colocarlos? Aunque es posible generar una fórmula algebraica tomando en cuenta solamente la dimensión aritmética, notando que se añaden siempre dos cuadrados a un término para producir el siguiente y que para llegar al término (digamos) 25 debemos adicionar al primer término 2 cuadrados 24 veces, esta vía resulta difícil en virtud de requerir un conteo sistemático que debe enseguida ser transformado en una multiplicación sofisticada: 3 + 2 x 24. Para nuestros alumnos de segundo grado, dicha vía se encuentra más allá de lo que parece razonable esperar, dada la naturaleza todavía emergente de su pensamiento aritmético. Es aquí donde la estructura espacial es proveedora de índices perceptivos generalizables. Ahora bien, para utilizar dichos índices, hay que ver los términos no como un conglomerado de cuadrados, sino como cuadrados propiciamente organizados. Hay varias formas de proceder. Una de las formas que hemos explorado en nuestra investigación es la de imaginar los términos como constituidos por dos filas (otras posibilidades incluyen ver los cuadrados organizados en diagonales en dirección ascendente o en dirección descendente, etc.). En el pasaje que comentaremos a continuación, los alumnos de la clase de segundo año fueron

divididos en pequeños grupos de 3 miembros. Los alumnos fueron invitados a dibujar los términos 5 y 6. Luego debían discutir sobre el término de Monique y decidir si era o no el término 8 de la secuencia.

Los tres alumnos de uno de los grupos sobre el que nos concentraremos en el resto de este articulo (Sara, Jaime y Melinda) trabajaron juntos por 32 minutos sobre esas y otras preguntas de la actividad. Cuando la maestra fue a ver al grupo, los alumnos le explicaron a la maestra que estaban de acuerdo con Monique: su término era el término 8 de la secuencia. La maestra decidió entonces iniciar un trabajo conjunto para llevar a los alumnos a tomar conciencia de la estructura espacial de la secuencia como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérico-espacial de la secuencia. Indicando la fila inferior con gestos repetidos, le maestra dice:

1. Maestra: Bueno. ... Vamos a ver los cuadrados que están abajo... solamente los cuadrados de abajo... [ver Figura 5, foto 1] no los que están arriba. En el término 1, ¿cuántos ...?
2. Alumno 1: ¡1!
3. Maestra: [señalando la fila de abajo del término 2; ver Figura 5, foto 2] ¿Término 2?
4. Alumnos: ¡2!
5. Maestra: [continúa haciendo los mismos gestos indexicales y hablando de manera rítmica, como lo hará en las próximas intervenciones; señalando la fila de abajo del término 3] ¿Término 3?
6. Alumnos: ¡3!
7. Maestra: [señalando la fila de abajo del término 4] ¿Término 4?
8. Alumnos: ¡4!
9. Maestra: [moviendo su mano hacia un espacio vacío después del término 4, donde se esperaría que se encontrase el término 5] ¿Término 5?
10. Alumnos: ¡5!
11. Maestra: [moviendo su mano hacia un espacio vacío donde se esperaría que se encontrase el término 6] ¿Término 6?
12. Alumnos: ¡6!
13. Maestra: [Igualmente, señalando indexicalmente la fila de abajo del imaginado término 7] ¿Término 7?
14. Alumnos: ¡7!
15. Maestra: [Igualmente, señalando indexicalmente la fila de abajo del imaginado término 8]
16. Alumnos: ¡8!

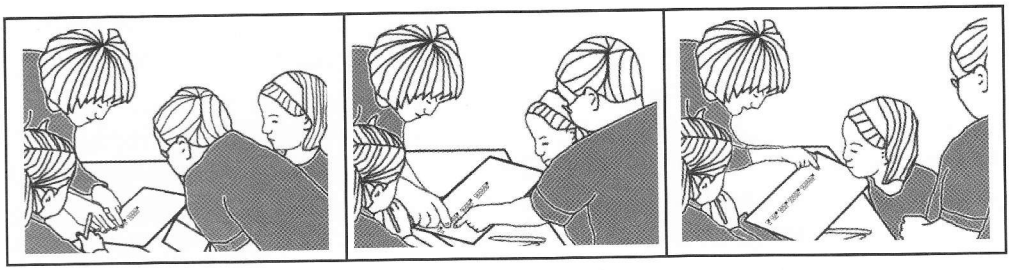

Figura 5. *Izquierda, la maestra señala las filas de abajo de los cuatro primeros términos. En medio, la maestra y Jaime señalan la fila debajo del término 2. A la derecha, imaginando que el término 8 está hacia el final de la hoja, la maestra señala el imaginado término 8*

En la línea 1, la maestra enfatiza la palabra «abajo», señalando la fila inferior del término 1. Luego, mueve despacio el índice de la mano izquierda tres veces horizontalmente a partir del término 1 hasta llegar al término 4. Los gestos y los enunciados de la maestra intentan hacer visible a los alumnos una nueva intención y su correspondiente manera de percibir las figuras: una manera en la cual estas aparecen divididas en dos filas. Naturalmente, los alumnos ven dos filas pero su atención no se detiene y no retiene esta particularidad de los términos que son filtrados, hasta ahora, según su atributo numérico. El problema de la maestra es, pues, resaltar del conjunto potencial de determinaciones sensibles ciertos rasgos que permitirán más adelante una generalización algebraica. La maestra contribuye con sus gestos y palabras, mientras que los alumnos acompañan los gestos con la vista y responden a medida que los gestos se desplazan sobre los términos visibles de la secuencia. A través de esta actividad semiótica, la maestra intenta resaltar la relación funcional de la que emergerá la toma de conciencia de una relación funcional entre el número de la figura y el número de los cuadrados en la fila inferior. Notable en este proceso de toma de conciencia (o de objetivación; Radford, 2003) es el papel del ritmo y el papel de los gestos indexicales que la maestra hace con las dos manos. En la Figura 6, la maestra hace dos tipos de gestos: uno en el que el gesto apunta hacia lo que es accesible a través de la vista: es el caso de los cuatro primeros términos. La maestra dice «término 3» y apunta hacia el término correspondiente sobre la hoja de los alumnos (ver Figura 6, foto 1). A partir del término 5 y hasta el término 8, la función gestual cambia de papel: puesto que los términos no están dibujados, los alumnos tienen que imaginarlos. Para ayudarlos en esta extrapolación sensible en la que está basada la generalización, la maestra en lugar de hacer un gesto por término, hace dos gestos: uno para señalar el término donde éste estaría ubicado si se hubiese dibujado (ver Figura 6, foto 2, en el que la maestra hace referencia al término 6), el otro para señalar la fila de abajo del término en cuestión (la fila de abajo del término 6). Siguiendo el mismo esquema, la maestra y los alumnos llegan hasta el término 8.

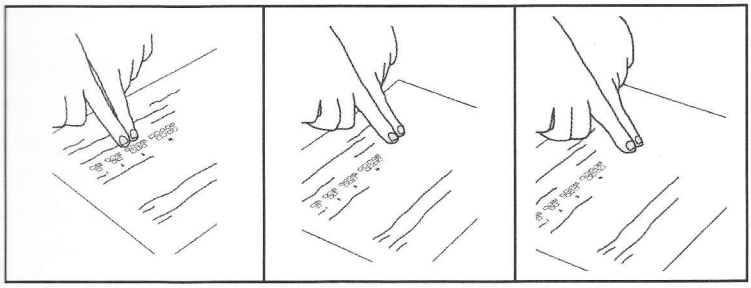

Figura 6. *Izquierda, la maestra señala con un gesto indexical doble el término 3. Medio y derecha, la maestra señala el término 6 y la fila inferior del término 6 (Reconstrucción a partir del vídeo)*

La acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un *nodo semiótico* (Radford, 2009), esto es, un segmento de la actividad de enseñanza aprendizaje en la que signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos (Radford, 2003) se complementan para generar una toma de conciencia de la manera en que el problema puede ser atacado desde un punto de vista algebraico. La generalización ocurre en la transición del término 4 (el último término en el campo concreto perceptivo) a los términos siguientes (5, 6, 7 y 8). Esta reposa en una abducción, su transformación en hipótesis y la aplicación de esta última a los términos siguientes que los gestos y las palabras intentan evocar y hacer presente —a través de la imaginación— en el terreno fenomenológico. En efecto, la característica común ha sido extraída del trabajo sensible sobre los términos 1 a 4 (característica que conlleva a notar que el número del término coincide con el número de cuadrados en la fila inferior). Dicha característica común es luego aplicada a los términos siguientes. La actividad continúa con la verificación del número de cuadrados en la fila inferior del término de Monique. La maestra logra que los alumnos comprueben que, en efecto, el término de Monique contiene 8 cuadrados en su fila inferior. Los alumnos se muestran muy contentos. Luego, la maestra invita a los alumnos a «ver solamente la fila de arriba». Siguiendo un procedimiento gestual similar, los alumnos toman conciencia que, en la fila superior de cada término, hay un cuadrado de más que el número del término. Con toda seguridad, afirman que el término de Monique tiene 9 cuadrados arriba. Luego hacen una verificación que culmina con una gran sorpresa: contrariamente a lo que habían creído, el término de Monique tiene solamente 8 cuadrados. A partir de esta experiencia, los alumnos pueden indicar cuántos cuadrados hay en un término fijo cualquiera de la secuencia. Así, Melinda dice unos minutos más tarde, refiriéndose al término 25: «25 + 25 + 1».

El problema de la denotación

A menudo se considera que hay generalización algebraica cuando los alumnos recurren al simbolismo algebraico alfanumérico. Como hemos sostenido en otros trabajos (ver, por ejemplo, Radford, 2010), esto no es cierto. La denotación de la generalización algebraica puede ser efectuada a través de otros sistemas semióticos. En el ejemplo que hemos discutido aquí, vemos que la denotación se hace a través de una actividad multimodal, en la que intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural. Los alumnos han llegado a constituir una fórmula encarnada en la acción y en el lenguaje y que se aplica a cualquier término particular, por ejemplo, en el caso del término 25, la formula es «25 + 25 + 1». Pero los alumnos pueden aplicarla ahora a otros términos. Otro alumno propone el término 50, y dice: «50 + 50 + 1». La encarnación (*embodiment*) de la formula en la acción y en el lenguaje natural es potente, pero tiene sus limites. La variable en sí no aparece como objeto de discurso: esta aparece instanciada en algunos de sus valores. Para que la variable ("el número del término») se convierta en objeto de discurso, habrá que mover la actividad de enseñanza-aprendizaje a otros niveles de generalidad en el que aparecerán, del lado de los alumnos, nuevas formas de conciencia mediatizadas por el uso más abstracto del lenguaje oral y escrito.

Referencias

Kant, I. (1974). *Logic*. Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company. (First Published in 1800).

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2009). «No! He starts walking backwards!»: Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education, 41*, 467-480.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.